

Total number of printed pages -11

UR25-D25 (MAT1104C)

2025

MATHEMATICS

(Major)

Paper : MAT1104C

(Classical Algebra)

Full Marks : 60

Time : 2½ hours

The figures in the margin indicate full marks for the questions.

1. Answer the following questions : $1 \times 7 = 7$

তলৰ প্ৰশ্নবোৰৰ উত্তৰ কৰা :

- (a) "The sum of the n^{th} roots of unity is $(-1)^n$." Is the statement true? Justify.

‘এককৰ n -তম মূলসমূহৰ যোগফল $(-1)^n$ ’ উক্তিটো সত্যনে? যুক্তি দিয়া।

- (b) What is the number of common root(s) of the equations $z^n - 1 = 0$ and $z^m - 1 = 0$ if m and n are relatively prime?

যদি m আৰু n পৰস্পৰ মৌলিক সংখ্যা, তেন্তে $z^n - 1 = 0$ আৰু $z^m - 1 = 0$ সমীকৰণ দুটাৰ একে মূল কিমানটা আছে?

(c) For what value(s) of a , the system

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ a & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix} \text{ has unique solution?}$$

a ৰ কি মানৰ বাবে $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ a & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}$ সমীকৰণৰ অদ্বিতীয় সমাধান থাকে?

(d) Under what condition the linear system of equation $A\bar{x} = \bar{0}$ has only the trivial solution; where A is a square matrix?

কি চৰ্ত সাপেক্ষে $A\bar{x} = \bar{0}$ সমীকৰণ প্ৰণালীটোৰ অকল শূন্য সমাধান থাকিব, য'ত A এটা বৰ্গাকাৰ মৌল কৰা।

(e) Express $\arg(\bar{z})$ in terms of $\arg \bar{z}$.

$\arg(\bar{z})$ ক $\arg \bar{z}$ ৰ ৰূপৰ প্ৰকাশ কৰা।

(f) The value of i^i is

i^i ৰ মান হ'ল

(i) $e^{-(4n+1)\pi/2}$

(ii) $e^{-i(4n+1)\pi/2}$

(iii) $e^{(4n+1)\pi/2}$

(iv) None of the above

where n is integer.

য'ত n হৈছে পূৰ্ণ সংখ্যা।

(Choose the correct answer)

(শুদ্ধ উত্তৰটো বাচি উলিওৱা)

(g) If α, β and γ are the roots of the equation $x^3 + qx + r = 0$, then the value of $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$ is _____.

যদি $x^3 + qx + r = 0$ সমীকৰণৰ মূলবোৰ α, β আৰু γ , তেন্তে $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$ ৰ মান হ'ব _____।

2. Answer the following questions : $2 \times 4 = 8$

তলৰ প্ৰশ্নবোৰৰ উত্তৰ কৰা :

(a) Identify the basic and free variables of the following system:

$$\begin{bmatrix} 1 & 6 & 2 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -8 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 7 \end{bmatrix}$$

তলৰ সমীকৰণ প্ৰণালীটোৰ বেচিক্ আৰু ফ্ৰি চলকবোৰ চিহ্নিত কৰা :

$$\begin{bmatrix} 1 & 6 & 2 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -8 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 7 \end{bmatrix}$$

(b) If $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n$ are roots of the equation

$$x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_n = 0 \quad \text{then}$$

find the value of $\sum \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}$ is.

যদি $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n$ সমীকৰণ

$$x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_n = 0 \text{ ৰ মূল হয়,}$$

তেন্তে $\sum \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}$ ৰ মান উলিওৱা।

(c) Find the value of $e^{n\pi i}$, if n is even.

$e^{n\pi i}$ মান নিৰ্ণয় কৰা যদি n যুগ্ম হয়।

(d) Determine if the following vectors are linearly dependent.

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 7 \\ 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 9 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix} \text{ and } \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 8 \end{bmatrix}.$$

তলৰ ভেক্টৰবোৰ লিনিয়াৰলি ডিপেনডেন্ট হয়নে নহয় নিৰ্ণয় কৰা :

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 7 \\ 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 9 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 8 \end{bmatrix}.$$

3. (a) State and prove De Moivre's theorem. 5

De Moivre's ৰ উপপাদ্য লিখা আৰু প্ৰমাণ কৰা।

(b) If $\sin^{-1}(\theta + i\phi) = \alpha + i\beta$, prove that $\sin^2 \alpha$ and $\cosh^2 \beta$ are the roots of the equation $x^2 - (1 + \theta^2 + \phi^2)x + \theta^2 = 0$ 5

যদি $\sin^{-1}(\theta + i\phi) = \alpha + i\beta$ তেন্তে প্ৰমাণ কৰা যে $\sin^2 \alpha$, $\cosh^2 \beta$ আৰু সমীকৰণৰ মূল হয়

$$x^2 - (1 + \theta^2 + \phi^2)x + \theta^2 = 0$$

Or / অথবা

(c) Find all complex numbers z such that

$$|z| = 1 \text{ and } \frac{z}{\bar{z}} + \frac{\bar{z}}{z} = 1. \quad 5$$

সকলোবোৰ জটিল সংখ্যা z নিৰ্ণয় কৰা যাতে $|z| = 1$

$$\text{আৰু } \frac{z}{\bar{z}} + \frac{\bar{z}}{z} = 1$$

- (d) If $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ are roots of the equation
 $x^n + p_1x^{n-1} + p_2x^{n-2} + \dots + p_{n-1}x + p_n = 0$,
 $(p_n \neq 0)$, find the value of $\sum \frac{\alpha_1^2}{\alpha_2}$. 5

যদি $x^n + p_1x^{n-1} + p_2x^{n-2} + \dots + p_{n-1}x + p_n = 0$,
 $(p_n \neq 0)$ সমীকৰণৰ মূলবোৰ $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$,

তেন্তে $\sum \frac{\alpha_1^2}{\alpha_2}$ ৰ মান উলিওৱা।

Or / অথবা

- (e) Solve by Cardon's method 5

$$x^3 - 3x - 1 = 0$$

কাৰ্ডনৰ পদ্ধতিৰ সহায়ত সমাধান কৰা

$$x^3 - 3x - 1 = 0$$

4. Answer **either** (a) **or** (b) : 5

(a) বা (b) উত্তৰ কৰা :

- (a) (i) Solve (সমাধান কৰা) : 5

$$3x_2 - 6x_3 + 6x_4 + 4x_5 = -5$$

$$3x_1 - 7x_2 + 8x_3 - 5x_4 + 8x_5 = 9$$

$$3x_1 - 9x_2 + 12x_3 - 9x_4 + 6x_5 = 15$$

- (ii) Show that the equation 5

$$\frac{A^2}{x-a} + \frac{B^2}{x-b} + \dots + \frac{L^2}{x-l} = x - m$$

where $a, b, \dots, l, m$, are real numbers all are different, can not have imaginary root.

দেখুওৱা যে

$$\frac{A^2}{x-a} + \frac{B^2}{x-b} + \dots + \frac{L^2}{x-l} = x - m$$

সমীকৰণৰ কাল্পনিক মূল থাকিব নোৱাৰে, য'ত $a, b, \dots, l, m$, ভিন্ন মান যুক্ত বাস্তব সংখ্যা।

- (b) (i) Write the following matrix in reduced echelon form, further find its rank. 5

তলৰ মৌলকৰূপটো reduced echelon form লৈ ৰূপান্তৰ কৰা আৰু লগতে কোটি নিৰ্ণয় কৰা

$$\begin{pmatrix} 0 & -3 & -6 & 4 & 9 \\ -1 & -2 & -1 & 3 & 1 \\ -2 & -3 & 0 & 3 & -1 \\ 1 & 4 & 5 & -9 & -7 \end{pmatrix}$$

- (ii) Determine if the following system is consistent: 5

$$x_2 - 4x_3 = 8$$

$$2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 1$$

$$5x_1 - 8x_2 + 7x_3 = 1$$

তলৰ সমীকৰণ প্ৰণালীটো সুসংগত হয়নে নহয়
নিৰ্ণয় কৰা :

$$x_2 - 4x_3 = 8$$

$$2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 1$$

$$5x_1 - 8x_2 + 7x_3 = 1$$

5. Answer **either** (a) **or** (b) :

- (a) (i) If $z_0 \neq 0$, find the roots of the equation $z^n - z_0 = 0$; $n \geq 2$ and $n \in \mathbb{N}$. 5

যদি $z_0 \neq 0$, তেন্তে $z^n - z_0 = 0$ সমীকৰণৰ
মূল নিৰ্ণয় কৰা যত $n \geq 2$, $n \in \mathbb{N}$.

- (ii) Derive the standard form of a biquadratic equation. 5

এটা চতুৰ্ঘাত সমীকৰণ প্ৰামাণিক ৰূপ নিৰ্ণয় কৰা।

- (b) (i) If α, β, γ are roots of the equation $x^3 + qx + r = 0$, find the equation where roots are $(\beta - \gamma)^2, (\gamma - \alpha)^2, (\alpha - \beta)^2$ 5

যদি $x^3 + qx + r = 0$ সমীকৰণৰ মূলবোৰ

α, β, γ , তেন্তে $(\beta - \gamma)^2, (\gamma - \alpha)^2, (\alpha - \beta)^2$

মূলবিশিষ্ট সমীকৰণটো উলিওৱা।

- (ii) Solve by Cramer's rule 5

$$x + y + z = 9$$

$$2x + 5y + 7z = 52$$

$$2x + y - z = 0$$

Cramer ৰ পদ্ধতিৰে সমাধান কৰা

$$x + y + z = 9$$

$$2x + 5y + 7z = 52$$

$$2x + y - z = 0$$

6. Answer **either** (a) or (b):

(a) বা (b) ৰ উত্তৰ কৰা :

(a) (i) Prove that primitive roots of

$$z^m - 1 = 0 \text{ are}$$

$$\varepsilon_k = \cos \frac{2k\pi}{m} + i \sin \frac{2k\pi}{m}; 0 \leq k < m$$

$$\text{and } \gcd(k, m) = 1. \quad 5$$

দেখুওৱা যে $z^m - 1 = 0$ সমীকৰণৰ
মূলবোৰ হ'ল

$$\varepsilon_k = \cos \frac{2k\pi}{m} + i \sin \frac{2k\pi}{m}; 0 \leq k < m,$$

য'ত $0 \leq k < m$ আৰু $\gcd(k, m) = 1$

(ii) Solve $z^7 - 1 = 0$. 5

সমাধান কৰা $z^7 - 1 = 0$

(b) (i) Let $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ be a linear transformation. Prove that there exists a unique matrix A s.t. $T(x) = Ax \forall x \in \mathbb{R}^n$. In fact A is the $m \times n$ matrix whose j^{th} column is a vector $T(e_j)$ where e_j is the j^{th} column of the identity matrix in $\mathbb{R}^n$. 6

ধৰা হ'ল $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ এটা L.T. প্রমাণ কৰা
যে এনেকুৱা এটি মৌলবস্তু A পোৱা আৰু য'ত
 $T(x) = Ax \forall x \in \mathbb{R}^n$ । দৰাচলতে A , $m \times n$
মৌলকক্ষ আৰু j^{th} স্তম্ভ হ'ল $T(e_j)$; e_j হ'ল
 $\mathbb{R}^n$ ৰ একক মৌলকক্ষৰ j^{th} স্তম্ভ।

(ii) Let $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ be LoT. s.t.

$$T(e_1) = (1, 3), T(e_2) = (4, -7) \text{ and}$$

$T(e_3) = (-5, 4)$ where e_1, e_2, e_3 are
columns of 3×3 unit matrix.

Determine $T(x)$, where $\bar{x} \in \mathbb{R}^3$. 4.

ধৰা হ'ল $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ এটি ৰৈখিক ৰূপান্তৰ

য'ত $T(e_1) = (1, 3)$, $T(e_2) = (4, -7)$;

$T(e_3) = (-5, 4)$; e_1, e_2, e_3 হ'ল 3×3

একথা মৌলকক্ষৰ ক্ৰমানুসাৰে স্তম্ভ। $T(x)$

উলিওৱা য'ত $\bar{x} \in \mathbb{R}^3$.