



Total number of printed pages – 11

23R-25 (PHY3104C)

2025

PHYSICS

(MAJOR)

Paper : PHY3104C

(Mathematical and Computational Physics)

Full Marks : 45

Time : Two hours

***The figures in the margin indicate
full marks for the questions.***

1. Answer the following questions : $1 \times 4 = 4$

তলৰ প্ৰশ্নবোৰৰ উত্তৰ লিখা :

(a) If $\vec{A}, \vec{B}$ and $\vec{C}$ are three vectors, what does the scalar triple product signify geometrically ?

যদি $\vec{A}, \vec{B}$ আৰু $\vec{C}$ তিনিটা ভেক্টৰ, তেন্তে স্কেলাৰ
ত্ৰিপূৰণে জ্যামিতিকভাৱে কি নিৰ্দেশ কৰে?

(b) Find $\vec{\nabla} \cdot \vec{r}$ if $\vec{r}$ is position vector.

যদি $\vec{r}$ অবস্থান ভেক্টৰ, তেন্তে $\vec{\nabla} \cdot \vec{r}$ নিৰ্ণয় কৰা।

(c) Evaluate the integral $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-3t} \delta(t-4) dt$.

$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-3t} \delta(t-4) dt$ সমাকলনৰ মান নিৰ্ণয় কৰা।

(d) Evaluate the following integral :

তলৰ অনুকলনটো নিৰ্ণয় কৰা :

$$\int_{-1}^1 (2x+1) \delta(x-2) dx.$$

2. Answer the following questions : $2 \times 3 = 6$

তলৰ প্ৰশ্নবোৰৰ উত্তৰ দিয়া :

(a) Find the value of constant 'a' such that the vectors $2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$, $\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}$ and $3\hat{i} + a\hat{j} + 5\hat{k}$ are coplanar.

ধ্ৰুবক 'a' ৰ মান নিৰ্ণয় কৰা যদিহে ভেক্টৰ $2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$, $\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}$ আৰু $3\hat{i} + a\hat{j} + 5\hat{k}$ সমতলীয় হয়।

(b) If $\phi(x, y, z) = x^2y + yz^2 + zx^2$, find the maximum directional derivative at the point (1,1,1) and the direction in which it occurs.

যদি $\phi(x, y, z) = x^2y + yz^2 + zx^2$ হয়, তেন্তে (1,1,1) বিন্দুত সৰ্বোচ্চ দিশীয় অৱকলনৰ মান আৰু দিশ নিৰ্ণয় কৰা।

(c) Use the Gauss Divergence Theorem to evaluate the flux of the vector field

$$\vec{F} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$$

through the surface of the cube defined by $0 \leq x, y, z \leq 1$.

গাউছৰ অপসৰণৰ উপপাদ্য ব্যৱহাৰ কৰি

$\vec{F} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ ভেক্টৰ ক্ষেত্ৰ এখনৰ বাবে $0 \leq x, y, z \leq 1$ বাহু দৈৰ্ঘ্যৰ ঘনক এটাৰ মাজেৰে পাৰ হৈ যোৱা অভিবাহ নিৰ্ণয় কৰা।

3. Give answers to the following questions : $5 \times 3 = 15$

(a) Let $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$.

ধৰা হ'ল, $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

- (i) Find the characteristic equation of A. 2

A ৰ বৈশিষ্ট্যপূৰ্ণ সমীকৰণটো লিখা।

- (ii) Verify the Cayley-Hamilton theorem for A, i.e., show that A satisfies its own characteristic equation. 3

A ৰ বাবে কেলি-হেমিল্টনৰ উপপাদ্যটো সত্যাপন কৰা i.e. দেখুওৱা যে A য়ে নিজৰ বৈশিষ্ট্যপূৰ্ণ সমীকৰণটো মানি চলে।

- (b) Solve the following differential equation:

তলৰ অৱকলজ সমীকৰণটো সমাধান কৰা :

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 4\frac{dy}{dx} + 5y = 0$$

Or

Solve the following differential equation :

তলৰ অৱকলজ সমীকৰণটো সমাধান কৰা :

$$\frac{dz}{dx} - xz = -x$$

- (c) Evaluate the following line integral : 5

তলৰ বৈখিক অনুকলনটো নিৰ্ণয় কৰা :

$$\oint_C (ydx + zdy + xdz)$$

where C is the triangular path joining the points (1,0,0), (0,1,0), and (0,0,1) in order.

য'ত C হ'ল ক্ৰমিকভাৱে (1,0,0), (0,1,0) আৰু (0,0,1) বিন্দুক সংযোগ কৰা ত্ৰিভুজীয় পথ।

Or

State the definition of the Gamma function $\Gamma(z)$ for a complex number z with $\text{Re}(z) > 0$. Evaluate $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ using the known result for the Gamma function. Express the Beta function $B(m,n)$ in terms of Gamma functions for $m, n > 0$. Compute the integral using the Beta function -

$$\int_0^1 x^3(1-x)^2 dx$$

$$1+1+1+2=5$$

এটা জটিল সংখ্যা z ৰ বাবে য'ত $\operatorname{Re}(z) > 0$, গামা ফলন $\Gamma(z)$ ৰ সংজ্ঞা দিয়া। গামা ফলনৰ ফলাফল ব্যৱহাৰ কৰি $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ ৰ মান নিৰ্ণয় কৰা। গামা ফলনৰ সহায়ত বিটা ফলন $B(m,n)$ ৰ প্ৰকাশ ৰাশি লিখা য'ত $m, n > 0$ । বিটা ফলন ব্যৱহাৰ কৰি তলৰ অনুকলনটো নিৰ্ণয় কৰা –

$$\int_0^1 x^3(1-x)^2 dx$$

4. Solve **any one** of the following questions:

তলৰ প্ৰশ্নবোৰৰ যিকোনো এটাৰ সমাধান কৰা :

(a) Derive the expression for the Laplacian operator ∇^2 in spherical polar coordinates (r, θ, ϕ) . 10

গোলকীয় মেৰু স্থানাংক (r, θ, ϕ) ৰ বাবে লাপলাচিয়ান অপাৰেটৰ ∇^2 ৰ প্ৰকাশ ৰাশি নিৰ্ণয় কৰা।

(b) Define diagonalization of a matrix. For the matrix

মেট্ৰিক্স কৰ্ণীয়কৰণৰ সংজ্ঞা দিয়া। এটা মেট্ৰিক্স

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix},$$

find the eigenvalues and corresponding eigenvectors of A . Verify that A can be expressed in the form $A = PDP^{-1}$, where D is a diagonal matrix.

$$2+4+4=10$$

A ৰ আইগেন মান আৰু আইগেন ভেক্টৰ নিৰ্ণয় কৰা। দেখুওৱা যে A ক $A = PDP^{-1}$ ৰূপত প্ৰকাশ কৰিব পাৰি, য'ত D হ'ল এটা তিৰ্যক মেট্ৰিক্স।

5. Solve **any one** of the following questions :

তলৰ যিকোনো এটা প্ৰশ্নৰ সমাধান কৰা :

(a) Derive the recurrence relation for Legendre polynomials:

$$(n+1)P_{n+1}(x) = (2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x).$$

লিজেণ্ডাৰ বহুপদৰ ক্ষেত্ৰত পুনৰাবৃত্তি সম্বন্ধটো নিৰ্ণয় কৰা -

$$(n+1)P_{n+1}(x) = (2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x).$$

Prove the orthogonality relation of Legendre polynomials:

$$\int_{-1}^1 P_m(x)P_n(x)dx = 0 \text{ for } m \neq n.$$

Also show that $P_n(1) = 1$ and

$$P_n(-1) = (-1)^n. \quad 4+3+3=10$$

লিজেণ্ডাৰ বহুপদৰ ক্ষেত্ৰত লাম্বিক সম্বন্ধটো নিৰ্ণয় কৰা-

$$\int_{-1}^1 P_m(x)P_n(x)dx = 0 \text{ য'ত } m \neq n \text{। আৰু}$$

দেখুওঁৱা যে $P_n(1) = 1$ আৰু $P_n(-1) = (-1)^n$ ।

(b) Consider the one-dimensional wave equation for a vibrating string of length L :

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, \quad 0 < x < L, \quad t > 0,$$

subject to the boundary conditions

$u(0,t) = 0, \quad u(L,t) = 0, \quad t \geq 0$, and the initial conditions

$$u(x,0) = f(x), \quad u_t(x,0) = g(x), \quad 0 \leq x \leq L.$$

Using the method of separation of variables, derive the spatial eigenvalue problem and show that the admissible eigenfunctions are

$$X_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

with eigenvalues $\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$

Express the general solution as a Fourier sine series :

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos(\omega_n t) + B_n \sin(\omega_n t)) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right),$$

where $\omega_n = c \frac{n\pi}{L}$. Derive formulas for

the coefficients A_n and B_n in terms of $f(x)$ and $g(x)$. 4+4+2=10

‘L’ দৈৰ্ঘ্যৰ কম্পিত তাঁৰ এডালৰ একমাত্ৰিক তৰংগ সমীকৰণটো হ’ল :

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, \quad 0 < x < L, \quad t > 0,$$

য’ত সীমা চৰ্ত $u(0,t) = 0, \quad u(L,t) = 0,$

$t \geq 0$ আৰু প্ৰাৰম্ভিক চৰ্ত $u(x,0) = f(x),$

$u_t(x,0) = g(x), \quad 0 \leq x \leq L$ চলকৰ পৃথিকীকৰণ

পদ্ধতি ব্যৱহাৰ কৰি আইগেন সমীকৰণ সমাধান কৰা

আৰু দেখুওৱা যে আইগেন ফলনবোৰ হ’ল –

$$X_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

য’ত আইগেন মানবোৰ হ’ল – $\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$

ফ’ৰিয়াৰৰ চাইন শ্ৰেণীৰ সহায়ত সমীকৰণটোৰ

সাধাৰণ সমাধানটোৰ প্ৰকাশ ৰাশি নিৰ্ণয় কৰা :

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos(w_n t) + B_n \sin(w_n t)) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

য’ত $w_n = c \frac{n\pi}{L}$, $f(x)$ আৰু $g(x)$ ৰ সহায়ত A_n

আৰু B_n গুণাংক দুটাৰ প্ৰকাশ ৰাশি নিৰ্ণয় কৰা।