

Total number of printed pages – 8

23R-25 (MAT3204C)

2025

MATHEMATICS

(MAJOR)

Paper : MAT3204C

(Real Analysis)

Full Marks : 60

Time : 2½ hours

***The figures in the margin indicate
full marks for the questions.***

1. Answer the following questions : $1 \times 7 = 7$

তলৰ প্ৰশ্নবোৰৰ উত্তৰ লিখা :

- (a) What can you say about $A \subseteq \mathbb{R}$ if $l.u.b$
 $A = g.l.b. A$?

সংহতি A ৰ বিষয়ে কি ক'ব পাৰি যদিহে $l.u.b$
 $A = g.l.b. A$ হয়।

- (b) State the law of trichotomy on $\mathbb{R}$.

ট্ৰাইক'টমি নিয়মটো লিখা।

- (c) Write down an example of a bounded set with no limit point.

এটা সীমাবদ্ধ সংহতিৰ উদাহৰণ দিয়া যাৰ কোনো সীমাবিন্দু নাই।

- (d) Write the set of limit points of the set Q of rational numbers.

পৰিমেয় সংখ্যাৰ সংহতি Q ৰ সীমা বিন্দুবোৰৰ সংহতিটো লিখা।

- (e) Give one example of a bounded sequence which is not convergent.

এটা সীমাবদ্ধ অনুক্রমৰ উদাহৰণ দিয়া যি অভিসাৰী হয়।

- (f) What is the relationship between $\limsup$ and $\liminf$ of a convergent sequence?

এটা অভিসাৰী অনুক্রমৰ $\limsup$ আৰু $\liminf$ ৰ মাজৰ সম্পৰ্কটো লিখা।

- (g) "Every conditionally convergent series is absolutely convergent". True or False. Justify.

"এটা চৰ্তসাপেক্ষে অভিসাৰী শ্ৰেণী সদায়েই নিঃচৰ্ত অভিসাৰী শ্ৰেণী হয়"। শুদ্ধ নে অশুদ্ধ, নাৰ্য্যতা প্ৰদান কৰা।

2. Answer the following questions : $2 \times 4 = 8$

তলৰ প্ৰশ্নবোৰৰ উত্তৰ লিখা :

- (a) Show that the set

$S = \left\{1, -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \dots\right\}$ is neither open nor closed.

দেখুওৱা যে $S = \left\{1, -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \dots\right\}$ সংহতিটো মুক্ত আৰু বদ্ধ সংহতি দুয়োটাই নহয়।

- (b) If $a \in \mathbb{R}$ is such that $0 \leq a < \epsilon \forall \epsilon > 0$ prove that $a = 0$.

যদি $a \in \mathbb{R}$ যাতে $0 \leq a < \epsilon \forall \epsilon > 0$, তেন্তে প্ৰমাণ কৰা যে $a = 0$ ।

- (c) Prove that every convergent sequence is bounded.

প্ৰমাণ কৰা যে প্ৰতিটো অভিসাৰী অনুক্রম পৰিবদ্ধ।

- (d) Show that the series $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n$ is not convergent.

দেখুওৱা যে $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n$ শ্ৰেণীটো অভিসাৰী নহয়।

3. Answer the following questions : $5 \times 3 = 15$

তলৰ প্ৰশ্নবোৰৰ উত্তৰ লিখা :

(a) If greatest element of a subset A of $\mathbb{R}$ exists, then it will be the $l.u.b$ of A .

যদি $\mathbb{R}$ ৰ এটা উপসংহতি A ৰ সৰ্বোচ্চ উপাদান থাকে।
তেন্তে সিহে A ৰ $l.u.b$ হ'ব।

(b) Define convergence of a sequence. If $0 < b < 1$, then show that $\lim_{n \rightarrow \infty} (b^n) = 0$.

শ্ৰেণীৰ অভিসাৰীতাৰ সংজ্ঞা লিখা। যদি $0 < b < 1$,
তেন্তে দেখুওৱা যে $\lim_{n \rightarrow \infty} (b^n) = 0$ হয়।

Or

(c) What do you mean by sequence of partial sum of a series? Prove that if

the series $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converges, then

$\lim x_n = 0$. Is the converse true? Justify.

এটা শ্ৰেণীৰ আংশিক যোগফলৰ অনুক্ৰম বুলিলে কি

বুজা? দেখুওৱা যে যদি $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ অভিসাৰী হয় তেন্তে

$\lim x_n = 0$ হয়। ইয়াৰ বিপৰীতটো সত্যনে? যুক্তি
দৰ্শোৱা।

(d) Show that the intersection of finite collection of open sets in $\mathbb{R}$ is open. Further, give an example to show that the intersection of infinitely many open sets in $\mathbb{R}$ may not be open.

দেখুওৱা যে $\mathbb{R}$ ত সসীম সংখ্যক মুক্ত সংহতিৰ সংগ্ৰহ
ছেদন এটা মুক্ত সংহতি। এটা উদাহৰণৰ সহায়ত দেখুওৱা
যে $\mathbb{R}$ ত অসীম সংখ্যক মুক্ত সংহতিৰ ছেদন মুক্ত নহয়।

Or

(e) Using the definition of Cauchy sequence, prove that the sequence $\left(\frac{1}{n}\right)$ is a Cauchy sequence.

কচি অনুক্ৰমৰ সংজ্ঞা ব্যৱহাৰ কৰি প্ৰমাণ কৰা যে $\left(\frac{1}{n}\right)$
অনুক্ৰমটো এটা কচি অনুক্ৰম।

4. Answer (a) or (b) of the following :

নিম্নোক্ত প্ৰশ্নবোৰৰ (a) অথবা (b) ৰ উত্তৰ দিয়া :

(a) State and prove the monotone convergence theorem. Show that

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e. \quad 5+5=10$$

একমুঠ অভিসৰণ উপপাদ্যটো লিখা আৰু প্ৰমাণ কৰা।

$$\text{দেখুওৱা যে } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \text{ হয়।}$$

- (b) Define cauchy sequence. Prove that a sequence of real numbers is convergent if and only if it is a cauchy sequence.

$$2+8=10$$

কচি অনুক্রমৰ সংজ্ঞা দিয়া। প্রমাণ কৰা যে বাস্তৱ সংখ্যাৰ এটা অনুক্রম অভিসাৰী হব যদি আৰু যদিহে ই এটা কচি অনুক্রম।

5. Answer (a) **or** (b) of the following :

$$10 \times 1 = 10$$

নিম্নোক্ত প্রশ্নবোৰৰ (a) অথবা (b) ৰ উত্তৰ দিয়া :

- (a) Show that the series $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ converges for $p > 1$, diverges for $p \leq 1$. 10

দেখুওৱা যে $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ শ্ৰেণীটো $p > 1$ ৰ কাৰণে

অভিসাৰী আৰু $p \leq 1$ ৰ বাবে অপসাৰী হয়।

Or

- (b) Define alternating series. State the Leibnitz's test for alternating series.

Show that $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ is convergent. Is it

absolutely convergent? Justify your answer.

$$1+1+4+4=10$$

‘অলতাৰনেটিং’ শ্ৰেণীৰ সংজ্ঞা লিখা। লিবনিটজৰ

উপপাদ্যটো লিখা। দেখুওৱা যে $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ শ্ৰেণীটো

অভিসাৰী হয়। উপৰোক্ত শ্ৰেণীটো নিঃচৰ্তে অভিসাৰী হয়নে? সত্যাপন কৰা।

6. Answer (a) **or** (b) of the following questions :

$$10 \times 1 = 10$$

নিম্নোক্ত প্রশ্নবোৰৰ (a) অথবা (b) ৰ উত্তৰ লিখা :

- (a) Let $a, b \in \mathbb{R}$ with $a < b$. Then, show that there exists $r \in Q$ (the set of rational nos). Such that $a < x < b$. 5+5=10

Prove that $(0,1] = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(0, 1 + \frac{1}{n}\right)$.

ধৰা হ'ল $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ । তেন্তে দেখুওৱা যে $r \in Q$ (পৰিমেয় সংখ্যাৰ সংহতি) যাতে $a < x < b$ হয়। প্রমাণ কৰা যে

$$(0,1] = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(0, 1 + \frac{1}{n}\right) \text{ হয়।}$$

(b) Discuss the convergence of the sequence defined as

$$x_1 = 8, x_{n+1} = \frac{1}{2}x_n + 2, n \in \mathbb{N}$$

Prove that the series $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ is

convergent.

$$5+5=10$$

তলৰ সংজ্ঞাবদ্ধ অনুক্ৰমটোৰ অভিসাৰীতা আলোচনা
কৰা :

$$x_1 = 8, x_{n+1} = \frac{1}{2}x_n + 2, n \in \mathbb{N}$$

প্রমাণ কৰা যে $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ শ্ৰেণীটো অভিসাৰী।
