

1 (Sem-5/FYUGP) MAT 45 MN/(A)

2 0 2 5

MATHEMATICS

(Minor)

Paper : MAT0500504

(Multivariate Calculus)

(Set-A)

Full Marks : 60

Time : 2½ hours

*The figures in the margin indicate full marks
for the questions.*

- 1. Choose the correct answer/Answer the following :** **1×8=8**

তলত দিয়াবোৰৰ শুদ্ধ উত্তৰটো বাছি উলিওৱা/উত্তৰ দিয়া :

- (a)** The function $f(x, y) = x \cdot y$ is continuous at the point $(0, 0)$. The statement

$f(x, y) = x \cdot y$ ফলনটো $(0, 0)$ বিন্দুত অবিচ্ছিন্ন।
উক্তিটো

- (i)** is true / সঁচা
- (ii)** is false / মিছা
- (iii)** It depends on path / পথৰ ওপৰত নিৰ্ভৰশীল
- (iv)** Undefined / অসংজ্ঞায়িত

(2)

(b) If $z = x^2 + y^2$ and $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$,
then $\frac{\partial z}{\partial r} =$

$z = x^2 + y^2$ আৰু $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ হ'লে,
তেতিয়া $\frac{\partial z}{\partial r} =$

(i) $2r$

(ii) 2θ

(iii) r^2

(iv) 0

(c) Total derivative of $z = xy$ is

$z = xy$ ৰ সম্পূৰ্ণ অন্তৰিক হ'ল

(i) $xdy + ydx$

(ii) $dx + dy$

(iii) $xydx$

(iv) $dx \cdot dy$

(d) If $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, then gradient
of $f(x, y, z)$ is

যদি $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ হয়, তেন্তে

$f(x, y, z)$ ৰ গ্ৰেডিয়েন্ট হ'ল

(i) $x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$

(ii) $2x\hat{i} + 2y\hat{j} + 2z\hat{k}$

(iii) $\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$

(iv) 0

(3)

(e) Find the divergence of $\vec{F} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$.

$\vec{F} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ ৰ ডাইভাৰ্জেন্স নিৰ্ণয় কৰা।

(f) For $f(x, y) = x^2 + y^2$, the critical point is

$f(x, y) = x^2 + y^2$ ফলনটোৰ সংকট বিন্দু হ'ব

(i) $(1, 1)$

(ii) $(0, 0)$

(iii) $(2, 2)$

(iv) $(-1, -1)$

(g) If $\vec{F} = \vec{\nabla}f$, where $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$,
then $\vec{\nabla} \times \vec{F} = ?$

যদি $\vec{F} = \vec{\nabla}f$, য'ত $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$,

তেতিয়া $\vec{\nabla} \times \vec{F} = ?$

(i) 0

(ii) 3

(iii) $x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$

(iv) None of the above

ওপৰৰ এটাও নহয়

(4)

- (h) Write the necessary condition that $f(x, y)$ to have extreme value at point (a, b) .

$f(x, y)$ ফলনটোৰ (a, b) বিন্দুত চৰম মান পোৱাৰ অত্যাৱশ্যকীয় চৰ্তটো লিখা।

2. Answer any six from the following questions :

2×6=12

তলৰ প্ৰশ্নবোৰৰ যি কোনো ছয়টাৰ উত্তৰ দিয়া :

- (a) If $f(x, y) = \int_x^y \frac{dt}{1+t^2}$, then find $f(x, y)$ at point $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

যদি $f(x, y) = \int_x^y \frac{dt}{1+t^2}$, তেন্তে $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ বিন্দুত $f(x, y)$ ৰ মান নিৰ্ণয় কৰা।

- (b) If $f(x, y, z) = x^2ye^{2x} + (x+y-z)^2$, then find $f(1, -1, 0)$.

যদি $f(x, y, z) = x^2ye^{2x} + (x+y-z)^2$, তেন্তে $f(1, -1, 0)$ ৰ মান নিৰ্ণয় কৰা।

- (c) If $f(x, y) = \sin^{-1}(xy)$, then find f_x at the point $(1, 1)$.

যদি $f(x, y) = \sin^{-1}(xy)$, তেন্তে f_x ৰ মান $(1, 1)$ বিন্দুত নিৰ্ণয় কৰা।

26A/121

(Continued)

(5)

- (d) Find the local extreme values of $f(x, y) = xy$.

$f(x, y) = xy$ ফলনটোৰ স্থানীয় চৰম মান নিৰ্ণয় কৰা।

- (e) If $\vec{F}(x, y) = (x^2 - y)\vec{i} + (xy - y^2)\vec{j}$, then find $\text{div } \vec{F}$.

যদি $\vec{F}(x, y) = (x^2 - y)\vec{i} + (xy - y^2)\vec{j}$, তেন্তে $\text{div } \vec{F}$ নিৰ্ণয় কৰা।

- (f) Show that

দেখুওৱা যে

$$\vec{\nabla} \cdot (\phi \vec{V}) = (\vec{\nabla} \phi) \cdot \vec{V} + \phi (\vec{\nabla} \cdot \vec{V})$$

- (g) Find the domain of the following function :

তলৰ ফলনটোৰ আদিক্ষেত্ৰ নিৰ্ণয় কৰা :

$$f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{9 - x^2 - y^2}}$$

- (h) Explain the meaning of 'level surface' with an example.

'সমতল পৃষ্ঠ' কি, উদাহৰণৰ সৈতে ব্যাখ্যা কৰা।

26A/121

(Turn Over)

(6)

(i) If $z = x^2y + y$, then show that

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$$

যদি $z = x^2y + y$, তেজ্জ দেখুওৱা যে

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$$

(ii) Find the directional derivative of $f(x, y) = x^2 + y$ at the point $(1, 1)$ in the direction of $\hat{i} + \hat{j}$.

$\hat{i} + \hat{j}$ ৰ দিশত $f(x, y) = x^2 + y$ ফলনটোৰ $(1, 1)$ বিন্দুত দিশাত্মক অৱকলজ নিৰ্ণয় কৰা।

3. Answer any four from the following questions : 5×4=20

তলৰ প্ৰশ্নবোৰৰ যি কোনো চাৰিটাৰ উত্তৰ দিয়া :

(a) Examine whether the function

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 + 4y, & \text{if } (x, y) \neq (1, 2) \\ 0, & \text{if } (x, y) = (1, 2) \end{cases}$$

is continuous at the point $(1, 2)$.

তলৰ ফলনটো $(1, 2)$ বিন্দুত অবিচ্ছিন্ন হয়নে পৰীক্ষা কৰা :

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 + 4y, & \text{যদি } (x, y) \neq (1, 2) \\ 0, & \text{যদি } (x, y) = (1, 2) \end{cases}$$

26A/121

(Continued)

(7)

(b) Find $\text{div } \vec{F}$, given that $\vec{F} = \vec{\nabla} f$, where $f(x, y, z) = x^2yz^3$.

যদি $f(x, y, z) = x^2yz^3$ আৰু $\vec{F} = \vec{\nabla} f$, তেজ্জ $\text{div } \vec{F}$ নিৰ্ণয় কৰা।

(c) If $w = f(x, y)$, $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ (r and θ are polar coordinates), then prove that

$$\left(\frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial w}{\partial \theta} \right)^2 = \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2$$

যদি $w = f(x, y)$, $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ (r আৰু θ পোলাৰ স্থানাংক), তেজ্জ প্ৰমাণ কৰা যে

$$\left(\frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial w}{\partial \theta} \right)^2 = \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2$$

(d) Find the directional derivative of $f(x, y) = 2x^2 - xy + 5$ at the point $(1, 1)$ in the direction of the unit vector $\vec{u} = \frac{1}{5}(3\hat{i} - 4\hat{j})$.

$f(x, y) = 2x^2 - xy + 5$ ফলনটোৰ $(1, 1)$ বিন্দুত একক ভেক্টৰ $\vec{u} = \frac{1}{5}(3\hat{i} - 4\hat{j})$ ৰ দিশত দিশাত্মক অৱকলজ নিৰ্ণয় কৰা।

26A/121

(Turn Over)

(8)

- (e) Find the maximum and minimum values of $x^2 + y^2 + 6x + 12$.

$x^2 + y^2 + 6x + 12$ ফলনটোৰ সৰ্বোচ্চ আৰু সৰ্বনিম্ন মান নিৰ্ণয় কৰা।

- (f) Find the maximum and minimum values of the function $f(x, y) = 3x + 4y$ on the circle $x^2 + y^2 = 1$.

$f(x, y) = 3x + 4y$ ফলনটোৰ $x^2 + y^2 = 1$ বৃত্তৰ সাপেক্ষে সৰ্বোচ্চ আৰু সৰ্বনিম্ন মান নিৰ্ণয় কৰা।

- (g) If $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ and $r = |\vec{r}|$, then prove that

$$\operatorname{div} \left(\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3} \right) = 4$$

যদি $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ আৰু $r = |\vec{r}|$, তেন্তে প্রমাণ কৰা যে

$$\operatorname{div} \left(\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3} \right) = 4$$

- (h) Find the curl of

$$\vec{V} = (xyz)\hat{i} + (3x^2y)\hat{j} + (xz^2 - y^2z)\hat{k}$$

at the point $(2, -1, 1)$.

$(2, -1, 1)$ বিন্দুত

$$\vec{V} = (xyz)\hat{i} + (3x^2y)\hat{j} + (xz^2 - y^2z)\hat{k}$$

curl নিৰ্ণয় কৰা।

(9)

4. Answer any *two* from the following questions :
10×2=20

তলৰ প্ৰশ্নবোৰৰ যি কোনো দুটাৰ উত্তৰ দিয়া :

- (a) (i) Use the method of Lagrange multiplier to maximize $f(x, y) = 16 - x^2 - y^2$, subject to $x + 2y = 6$.

6

লাগ্ৰেঞ্জৰ পদ্ধতি ব্যৱহাৰ কৰি $f(x, y) = 16 - x^2 - y^2$ ৰ সৰ্বোচ্চ মান নিৰ্ণয় কৰা, য'ত $x + 2y = 6$.

- (ii) If $f(x, y, z) = xyz + x^2y^3z^4$, then show that

4

$$f_{xyz} = f_{yzx} = f_{zxy}$$

যদি $f(x, y, z) = xyz + x^2y^3z^4$, তেন্তে দেখুওৱা যে

$$f_{xyz} = f_{yzx} = f_{zxy}$$

- (b) (i) Prove that the following function is not continuous at the point $(0, 0)$: 5

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 + y^3}{x - y}, & \text{when } x \neq y \\ 0, & \text{when } x = y \end{cases}$$

(10)

প্রমাণ কৰা যে তলৰ ফলনটো $(0, 0)$ বিন্দুত
অবিচ্ছিন্ন নহয় :

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 + y^3}{x - y}, & \text{য'ত } x \neq y \\ 0, & \text{য'ত } x = y \end{cases}$$

(ii) Prove that $y = f(x + at) + g(x - at)$
satisfies $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right)$, where f

and g are assumed to be at least
twice differentiable and a is a
constant.

5

যদি f আৰু g ফলন দুটা কমেও দ্বিতীয় ঘৰ্টেলৈ
অৱকলনীয় আৰু a এটা ধ্ৰুৱক হয়, তেন্তে
প্রমাণ কৰা যে $y = f(x + at) + g(x - at)$ য়ে
 $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right)$ ক সিদ্ধ কৰে।

(c) (i) If $u = f(r)$ and $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$,
then prove that

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f''(r) + \frac{1}{r} f'(r)$$

6

যদি $u = f(r)$ আৰু $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$,
তেন্তে প্রমাণ কৰা যে

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f''(r) + \frac{1}{r} f'(r)$$

(11)

(ii) Find the directional derivative by
using gradient of $f(x, y) = x^2 \sin 2y$
at the point $\left(1, \frac{\pi}{2}\right)$ in the direction of
 $\vec{V} = 3\hat{i} - 4\hat{j}$.

4

গ্ৰেডিয়েন্ট ব্যৱহাৰ কৰি, $\left(1, \frac{\pi}{2}\right)$ বিন্দুত

$f(x, y) = x^2 \sin 2y$ ফলনটোৰ $\vec{V} = 3\hat{i} - 4\hat{j}$ ৰ
দিশত দিশাত্মক অৱকলনজ নিৰ্ণয় কৰা।

(d) (i) Find local extreme value of the
function

$$f(x, y) = xy - x^2 - y^2 - 2x - 2y + 4$$

5

$$f(x, y) = xy - x^2 - y^2 - 2x - 2y + 4$$

ফলনটোৰ স্থানীয় চৰম মান নিৰ্ণয় কৰা।

(ii) Find the point upon the plane
 $ax + by + cz = P$ at which the
function $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ has
a minimum value and find this
minimum value.

5

$ax + by + cz = P$ সমতলৰ ওপৰত বিন্দু
নিৰ্ণয় কৰা যাতে $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$
ফলনটোৰ মান সৰ্বনিম্ন হয় আৰু এই সৰ্বনিম্ন মান
নিৰ্ণয় কৰা।

- (e) (i) Find the value of n for which the vector $r^n \vec{r}$ is solenoidal, where $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ and $|\vec{r}| = r$.

4

n ৰ মান নিৰ্ণয় কৰা যদি $r^n \vec{r}$ সোলেনয়েডাল ভেক্টৰ ক্ষেত্ৰ হয়, য'ত $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ আৰু $|\vec{r}| = r$.

- (ii) Prove that

$$\vec{F} = (y^2 - z^2 + 3yz - 2x)\hat{i} + (3xz + 2xy)\hat{j} + (3xy - 2xz + 2z)\hat{k}$$

is both solenoidal and irrotational.

$$3+3=6$$

প্ৰমাণ কৰা যে

$$\vec{F} = (y^2 - z^2 + 3yz - 2x)\hat{i} + (3xz + 2xy)\hat{j} + (3xy - 2xz + 2z)\hat{k}$$

সোলেনয়েডাল আৰু ইৰোটেশ্যনেল ভেক্টৰ ক্ষেত্ৰ হয়।

★ ★ ★