

1 (Sem-5/FYUGP) MAT 46 MN/(B)

2 0 2 5

MATHEMATICS

(Minor)

Paper : MAT0500604

(Numerical Analysis—I)

(Set-B)

Full Marks : 45

Time : 2 hours

*The figures in the margin indicate full marks
for the questions.*

1. Answer the following questions : 1×5=5

তলৰ প্রশ্নকেইটাৰ উত্তৰ লিখা :

(a) Write the first step to eliminate x from the second equation in the following system by Gaussian elimination method :

নিম্নলিখিত সমীকৰণসমূহত Gaussian elimination পদ্ধতি ব্যৱহাৰ কৰি দ্বিতীয় সমীকৰণৰ পৰা x নোহোৱা কৰাৰ প্ৰথম পদক্ষেপটো লিখা :

$$x + y = 5$$

$$2x + 3y = 8$$

(b) State one condition required for the Gauss-Seidel method to converge.

Gauss-Seidel পদ্ধতি কনভাৰ্জ কৰিবলৈ কোনটো চৰ্ত পূৰণ কৰিব লাগিব ?

- (c) State the general form of Newton's forward interpolation formula.

Newtonৰ ফৰৱাৰ্ড ইণ্টাৰপলেচন ফৰ্মুলাৰ সাধাৰণ ৰূপটো উল্লেখ কৰা।

- (d) State the formula of the trapezoidal rule for numerical integration.

সংখ্যাগত সমাকলনত trapezoidal ruleৰ সূত্ৰটো উল্লেখ কৰা।

- (e) State the formula of Simpson's $\frac{1}{3}$ rule for numerical integration.

সংখ্যাগত সমাকলনত Simpson's $\frac{1}{3}$ ruleৰ সূত্ৰটো লিখা।

2. Answer any five of the following questions :

$$2 \times 5 = 10$$

তলত দিয়া প্ৰশ্নবোৰৰ যি কোনো পাঁচটাৰ উত্তৰ লিখা :

- (a) Solve the following system of equations using one step of Gauss-Jordan elimination :

Gauss-Jordan এলিমিনেচনৰ এটা পদক্ষেপ ব্যৱহাৰ কৰি নিম্নলিখিত সমীকৰণ দুটাৰ সমাধান কৰা :

$$x + y = 4$$

$$2x + 3y = 9$$

Write the new augmented matrix after the first row operation.

প্ৰথম শাৰী প্ৰচলনৰ পাছত নতুন augmented matrixটো লিখা।

- (b) Use one step of the Jacobi method to solve the following system of equations. Start with $x = 0$ and $y = 0$:

নিম্নলিখিত সমীকৰণসমূহৰ পৰা Jacobi পদ্ধতিৰে এটা পদক্ষেপ ব্যৱহাৰ কৰি সমাধান কৰা। প্ৰাৰম্ভিক মান হিচাপে $x = 0$ আৰু $y = 0$ বুলি ধৰা :

$$x + y = 5$$

$$2x + 3y = 12$$

Find the new values of x and y after the first step.

প্ৰথম পদক্ষেপৰ পাছত x আৰু y ৰ নতুন মান লিখা।

- (c) Use one step of the Gauss-Seidel method to solve the following system of equations. Start with $x = 0$ and $y = 0$:

নিম্নলিখিত সমীকৰণসমূহৰ পৰা Gauss-Seidel পদ্ধতিৰে এটা পদক্ষেপ ব্যৱহাৰ কৰি সমাধান কৰা। প্ৰাৰম্ভিক মান হিচাপে $x = 0$ আৰু $y = 0$ বুলি ধৰা :

$$x + y = 4$$

$$2x + 3y = 9$$

Find the new values of x and y after the first step.

প্ৰথম পদক্ষেপৰ পাছত x আৰু y ৰ নতুন মান লিখা।

- (d) Using Lagrange interpolation formula, find the interpolating polynomial for the following data :

Lagrange interpolation সূত্র ব্যবহার কৰি তলৰ তথ্য অনুযায়ী interpolating polynomial টো নিৰ্ণয় কৰা :

$x :$	1	2	4
$f(x) :$	3	6	12

Write only Lagrange formula.

কেৱল Lagrange সূত্ৰটো লিখা।

- (e) For the following table, compute the forward difference of Δf_0 and $\Delta^2 f_0$:

তলত দিয়া টেবুলৰ বাবে Δf_0 আৰু $\Delta^2 f_0$ ৰ forward difference নিৰ্ণয় কৰা :

$x :$	0	1	2
$f(x) :$	4	7	12

- (f) Using the Lagrange interpolation formula, construct the interpolating polynomial for the points $(x, y) = (1, 2), (2, 3)$.

Lagrange interpolation সূত্ৰ ব্যবহার কৰি $(x, y) = (1, 2), (2, 3)$ ৰ বাবে interpolating পলিনমিয়েল গঠন কৰা।

- (g) Approximate the integral $\int_0^2 (x^2 + 1) dx$ using the trapezoidal rule with four equal sub-intervals.

$\int_0^2 (x^2 + 1) dx$ ৰ মান চাৰিটা সমান অন্তৰাল ব্যবহার কৰি trapezoidal rule অনুসৰি প্ৰায়মানভাৱে উলিওৱা।

- (h) Use Simpson's $\frac{1}{3}$ rule to estimate $\int_0^3 (3x^2 + 2x + 1) dx$ with step size $h = 1$.

Simpson ৰ $\frac{1}{3}$ নিয়ম ব্যবহার কৰি $\int_0^3 (3x^2 + 2x + 1) dx$ ৰ মান নিৰ্ণয় কৰা য'ত ধাপৰ মান $h = 1$ ধৰা।

- (i) Given the approximations $I(h) = 1.728$ and $I\left(\frac{h}{2}\right) = 1.742$ for an integral. Use

Richardson extrapolation to find a more accurate estimate of the integral.

দিয়া আছে এটা সমাকলনৰ প্ৰায়মান $I(h) = 1.728$ আৰু $I\left(\frac{h}{2}\right) = 1.742$. Richardson extrapolation ব্যবহার কৰি সমাকলনৰ অধিক সঠিক মান নিৰ্ণয় কৰা।

- (j) Form the Newton forward interpolation polynomial using the following data :

তলত দিয়া তথ্য ব্যবহার কৰি নিউটন ফৰৱাৰ্ড ইণ্টাৰপলেছন পলিনমিয়েল গঠন কৰা :

$x :$	0	1	2
$f(x) :$	1	2	4

3. Answer any four of the following questions :

5×4=20

তলৰ প্ৰশ্নবোৰৰ যি কোনো চাৰিটাৰ উত্তৰ দিয়া :

- (a) Solve the following system of linear equations using

তলত দিয়া বৈখিক সমীকৰণবোৰ নিম্ন উল্লেখিত পদ্ধতি ব্যবহার কৰি সমাধান কৰা :

(6)

- (i) Gaussian elimination with row operations;

গাউছিয়ান এলিমিনেচন পদ্ধতিত শাৰি অপাৰেচন ব্যৱহাৰ কৰি

- (ii) Gauss-Jordan method :

গাউছ-জৰ্ডান পদ্ধতিৰ সহায়ত

$$2x + 3y - z = 5$$

$$4x + y + 2z = 6$$

$$-2x + 5y + z = 3$$

Find the values of x, y, z using both methods.

উভয় পদ্ধতি ব্যৱহাৰ কৰি x, y, z ৰ মান উলিওৱা।

- (b) Use iterative method (Gauss-Seidel) to find one iteration of the solution for the following system of equations :

তলৰ সমীকৰণকেইটাৰ বাবে ইটাৰেটিভ পদ্ধতি (Gauss-Seidel) ব্যৱহাৰ কৰি সমাধানৰ এটা ইটাৰেছন উলিওৱা :

$$10x + y + z = 12$$

$$2x + 10y + z = 13$$

$$2x + y + 10z = 14$$

Take initial approximations as

$$x^{(0)} = 0, y^{(0)} = 0, z^{(0)} = 0$$

Compute $x^{(1)}, y^{(1)}, z^{(1)}$.

আৰম্ভণিৰ অনুমান হিচাবে

$$x^{(0)} = 0, y^{(0)} = 0, z^{(0)} = 0$$

বুলি লোৱা আৰু $x^{(1)}, y^{(1)}, z^{(1)}$ ৰ মান গণনা কৰা।

(7)

- (c) Use the Jacobi iterative method to find one iteration of the solution for the following system of equations :

তলৰ সমীকৰণকেইটাৰ বাবে Jacobi ইটাৰেটিভ পদ্ধতি ব্যৱহাৰ কৰি সমাধানৰ এখন ইটাৰেছন উলিওৱা :

$$5x + y + z = 7$$

$$x + 6y + z = 8$$

$$x + y + 7z = 9$$

Take initial approximations as

$$x^{(0)} = 0, y^{(0)} = 0, z^{(0)} = 0$$

Compute $x^{(1)}, y^{(1)}, z^{(1)}$.

আৰম্ভণিৰ অনুমান হিচাবে

$$x^{(0)} = 0, y^{(0)} = 0, z^{(0)} = 0$$

বুলি লোৱা আৰু $x^{(1)}, y^{(1)}, z^{(1)}$ ৰ মান গণনা কৰা।

- (d) Using the data given below, find the value of $f(3)$ by

তলত দিয়া তথ্য ব্যৱহাৰ কৰি নিম্নলিখিত পদ্ধতিৰে $f(3)$ ৰ মান উলিওৱা :

- (i) Lagrange interpolation formula;

লেগ্ৰেঞ্জ ইণ্টাৰপলেচন ফৰ্মুলা

- (ii) Newton's forward interpolation formula :

নিউটনৰ ফৰৱাৰ্ড ইণ্টাৰপলেচন ফৰ্মুলা

$$x : 1 \quad 2 \quad 4$$

$$f(x) : 1 \quad 4 \quad 16$$

Use above data and show all steps clearly.

উপৰোক্ত তথ্য ব্যৱহাৰ কৰি সকলো ধাপ স্পষ্টকৈ উলিওৱা।

- (e) Using the Gregory-Newton forward interpolation formula, find the value of $f(2.5)$ from the following table :

Gregory-Newton ফৰৱাৰ্ড ইণ্টাৰপলেচন সূত্ৰ ব্যৱহাৰ কৰি তলত দিয়া টেবুলৰ পৰা $f(2.5)$ মান উলিওৱা :

$x :$	2	3	4	5
$f(x) :$	8	27	64	125

Show all steps clearly.

সকলো ধাপ স্পষ্টভাৱে প্ৰদৰ্শন কৰা।

- (f) Use Simpson's $\frac{1}{3}$ rule to approximate the value of the integral

Simpsonৰ $\frac{1}{3}$ নিয়ম ব্যৱহাৰ কৰি সমাকলনৰ মান প্ৰায়মানভাৱে নিৰ্ণয় কৰা :

$$\int_0^3 (x^2 + 3) dx$$

The values of the function at equal intervals of $h=1$ are given below :

$h=1$ ৰ সমান অন্তৰালত দিয়া থকা ফলনৰ মানসমূহ তলত দিয়া হৈছে :

$x :$	0	1	2	3
$f(x) = x^2 + 3 :$	3	4	7	12

Evaluate the integral using Simpson's rule.

Simpsonৰ নিয়ম ব্যৱহাৰ কৰি সমাকলনটো নিৰ্ণয় কৰা।

- (g) Use Euler's method to approximate the value of $y(0.2)$ for the differential equation

Euler পদ্ধতি ব্যৱহাৰ কৰি তলত দিয়া অৱকল সমীকৰণৰ বাবে $y(0.2)$ ৰ মান প্ৰায়মানভাৱে নিৰ্ণয় কৰা :

$$\frac{dy}{dx} = x + y$$

With the initial condition $y(0)=1$, take step size $h=0.1$. Perform the calculation for two steps to find $y(0.2)$.

প্ৰাৰম্ভিক অৱস্থা $y(0)=1$ লৈ $h=0.1$ পদক্ষেপ মাপ লোৱা আৰু $y(0.2)$ নিৰ্ণয় কৰিবলৈ দুটা পদক্ষেপত গণনা কৰা।

- (h) Use the trapezoidal rule to calculate the approximate value of the integral $\int_1^3 (2x+1) dx$. The function values at equal intervals of $h=1$ are given below :

Trapezoidal rule ব্যৱহাৰ কৰি $\int_1^3 (2x+1) dx$ ৰ প্ৰায়মান উলিওৱা। $h=1$ ৰ সমান অন্তৰালত ফলনৰ মানসমূহ তলত দিয়া হৈছে :

$x :$	1	2	3
$f(x) = 2x+1 :$	3	5	7

4. Answer any one of the following questions : 10

তলত দিয়া প্ৰশ্নবোৰৰ যি কোনো এটাৰ উত্তৰ দিয়া :

- (a) Use the Gauss-Seidel iterative method to find the solution of the following system of equations up to three iterations :

(10)

Gauss-Seidel iterative method ব্যৱহাৰ কৰি তলত দিয়া সমীকৰণ ব্যৱহাৰ সমাধান তিনিটা ইটাৰেশ্বন লৈ উলিওৱা :

$$10x + 2y + z = 14$$

$$2x + 10y + 3z = 15$$

$$x + y + 10z = 12$$

Take the initial approximations as

$$x^{(0)} = 0, y^{(0)} = 0, z^{(0)} = 0$$

Compute $(x^{(1)}, y^{(1)}, z^{(1)})$, $(x^{(2)}, y^{(2)}, z^{(2)})$, $(x^{(3)}, y^{(3)}, z^{(3)})$.

আৰম্ভণিৰ অনুমান হিচাবে $x^{(0)} = 0, y^{(0)} = 0, z^{(0)} = 0$ বুলি লোৱা আৰু

$(x^{(1)}, y^{(1)}, z^{(1)})$, $(x^{(2)}, y^{(2)}, z^{(2)})$, $(x^{(3)}, y^{(3)}, z^{(3)})$ ৰ

মান গণনা কৰা।

(b) Using the Gregory-Newton backward interpolation formula, find the value of $f(9.5)$ from the following table :

গ্ৰেগৰী-নিউটন বেকৱৰ্ড ইণ্টাৰপলেচন সূত্ৰ ব্যৱহাৰ কৰি তলত দিয়া মানৰ বাবে $f(9.5)$ ৰ মান উলিওৱা :

x	: 6	7	8	9	10
$f(x)$	: 12	20	30	42	56

Construct the backward difference table and evaluate $f(9.5)$ using the formula.

বেকৱৰ্ড ডিফাৰেন্স টেবুল গঠন কৰা আৰু সূত্ৰটো ব্যৱহাৰ কৰি $f(9.5)$ ৰ মান উলিওৱা।

(11)

(c) The following table shows the temperature (in °C) recorded at different times of the day :

তলত দিয়া সময় অনুসৰি দিনৰ তাপমাত্ৰা (°C)ৰ তথ্য দিয়া হৈছে :

Time (hour)	:	0	2	4	6
সময় (ঘণ্টা)					
Temperature (°C)	:	15	17	21	30
তাপমাত্ৰা (°C)					

(i) Use piecewise linear interpolation to estimate the temperature at 3 hours.

Piecewise linear interpolation ব্যৱহাৰ কৰি 3 ঘণ্টাৰ তাপমাত্ৰা অনুমান কৰা।

(ii) Use piecewise quadratic interpolation (consider two consecutive intervals at a time) to estimate the temperature at 5 hours.

Piecewise quadratic interpolation ব্যৱহাৰ কৰি (একই সময়ত দুটা পৰৱৰ্তী অন্তৰাল ধৰি) 5 ঘণ্টাৰ তাপমাত্ৰা অনুমান কৰা।

(iii) Plot the piecewise linear interpolation function for the given data.

দিয়া তথ্যৰ বাবে piecewise linear interpolation ফলনৰ গ্ৰাফ আঁকা।

(d) Consider the function

ধৰা হ'ল ফলন

$$f(x) = e^{-x^2}$$

- (i) Using Richardson extrapolation, improve the estimate of the derivative $f'(0)$ using the forward difference formula with step sizes $h = 0.1$ and $h = 0.5$.

Richardson extrapolation ব্যৱহাৰ কৰি ফৰৱাৰ্ড ডিফাৰেন্স সূত্ৰৰ সৈতে $h = 0.1$ আৰু $h = 0.5$ ধাপ ব্যৱহাৰ কৰি $f'(0)$ ৰ অনুমান কৰা।

- (ii) Using Romberg integration, estimate the integral $\int_0^1 e^{-x^2} dx$ to the second-order Romberg table. Show all steps clearly.

Romberg integration ব্যৱহাৰ কৰি $\int_0^1 e^{-x^2} dx$ ৰ অনুমান কৰা, দ্বিতীয় অৰ্ডাৰ Romberg টেবুললৈকে। সকলো ধাপ স্পষ্টকৈ দেখুওৱা।

★ ★ ★